Министерство сельского хозяйства РФ

Колледж Агробизнеса Забайкальского аграрного института – филиала ФГБОУ ВО
«Иркутский государственный аграрный университет имени А.А.Ежевского»

МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА; ГЕОМЕТРИЯ.

Методические рекомендации

для самостоятельной работы обучающихся заочного отделения (на базе 9 классов)

по специальностям: 35.02.07. «МЕХАНИЗАЦИЯ СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА»

38.02.01 ЭКОНОМИКА И БУХГАЛТЕРСКИЙ УЧЕТ

23.02.03 ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБСЛУЖИВАНИЕ И РЕМОНТ АВТОМОБИЛЬНОГО ТРАНСПОРТА

21.02.04 ЗЕМЛЕУСТРОЙСТВО

Чита-2016

ББК 26.82

Г.67.

УДК 911.52

Ответственный за выпуск: Н.Г. Ковтун, методист Колледжа Агробизнеса Забайкальского Аграрного института – филиала ФГБОУ ВО «Иркутский государственный аграрный университет имени А.А.Ежевского»

Горюнова В.В., Ковтун Н.Г.

Методическая разработка для студентов заочного отделения, обучающихся на базе 9кл. по дисциплине математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия/

Горюнова В.В., Ковтун Н.Г. г. Чита, Колледж Агробизнеса ЗабАИ - филиала ФГБОУ ВО «Иркутский государственный аграрный университет имени А.А.Ежевского»

Данная методическая разработка предназначена в помощь студентам заочного отделения средних специальных учебных заведений, изучающих дисциплину математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия.

Рассмотрена на заседании цикловой комиссии общеобразовательных дисциплин (Протокол № от « »)

Введение

Настоящая методическая разработка предназначена для студентов заочного отделения Колледжа Агробизнеса ЗабАИ.

Методическая разработка составлена в соответствии с рабочей программой дисциплины математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия Колледжа агробизнеса ЗабАИ.

Количество часов на освоение программы дисциплины математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия:

максимальной учебной нагрузки обучающегося 351 час, в том числе:

обязательной аудиторной учебной нагрузки обучающегося 26 часов;

самостоятельной работы обучающегося 325 часов.

Основной формой контроля за самостоятельной работой являются практические занятия, написание контрольной работы.

Показателем оценки результатов внеаудиторной самостоятельной работы студента являются:

- уровень освоения студентом учебного материала;
- умение студента использовать теоретические знания при решении задач;
- обоснованность и четкость изложения ответа;
- оформление материала в соответствии с требованиями.

Тема №1: Введение. Понятие о числе.

Натуральные числа N : 1,2,3,4…используют для подсчета предметов. Множество Z – это целые числа, Q – рациональные числа, R – действительные числа, C – комплексные числа.

Результатами подсчетов, измерений являются числа, которые лишь приблизительно, с некоторой точностью характеризуют искомые величины. Разность между точным и приближенным значением величины называется *погрешностью приближения*. Если x – точное значение, a – приближенное значение, то разность (x - a) =Δx - погрешность приближения.

$|\Delta x|=|x - a|$ - абсолютная погрешность приближения;

$\frac{|\Delta x|}{|a|}$ – относительная погрешность приближения

$|\Delta x| \le h$ - граница абсолютной погрешности

$\frac{|\Delta x|}{|a|} \le \delta$ - граница относительной погрешности

Абсолютная погрешность суммы и разности приближенных значений $h= h_1+h_2$

Относительная погрешность произведения и частного $\delta=\delta_1+\delta_2$

Выполнение вычислений с приближенными данными:

- Найдите сумму и разность приближенных значений чисел x= 6,54±0,005 и y=16,22±0,05. Решение: x+y =(6,54+16,22) ± (0,005+0,05) = 22,76 ± 0,055

Комплексными числами называются числа вида a+ bi , где a и b – действительные числа, число i – мнимая единица ($i^2 = - 1$).

Тригонометрическая форма комплексного числа $z = r\cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$

Показательная форма комплексного числа $z = r\cdot e^{i\varphi}$.

Выполнение арифметических действий с комплексными числами:

- Найти сумму, разность, произведение двух комплексных чисел $z_1 = 2 - 3i$ и $z_2 = 2 - i$. Решение: $z_1 + z_2 = (2+2) + (-3i - i) = 4 - 4i$

$z_1 - z_2 = (2 -2) + (- 3i - (- i)) = 0 - 2i = - 2i$. $z_1 \cdot z_2 = 2\cdot 2 - 2i - 6i + 3i^2 = 4 - 8i - 3 = 1 - 8i$.

Тема №2 Корни, степени и логарифмы

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА СТЕПЕНИ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ:

Пусть $a \in N, b \in N, n \in N, m \in N$, тогда справедливы свойства степени с натуральным показателем.

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
3. $(a^n)^m = a^{nm}$

4. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
6. $1^n=1$
7. $a^1 = a$
8. $a^0 = 1$

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ.

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
4. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
5. $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$
6. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, a>0, a≠1.

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА КВАДРАТНОГО КОРНЯ.

1. $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, a≥0, b≥0
2. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, a≥0, b>0.
3. $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, a≥0

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА АРИФМЕТИЧЕСКОГО КОРНЯ.

1. Если $\sqrt[n]{a} = b$,то $a = b^n$, a≥0, b≥
2. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, a≥0
3. $\sqrt[m]{-a} = -\sqrt[m]{a}$, m – нечетное, a>0
4. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, a≥0, b≥0
4. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, a≥0, b>0.
5. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$, a≥0

ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ.

1. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
2. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
3. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
4. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
6. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Выполнение действий с корнями и степенями, логарифмами

- $\sqrt{9 \cdot 25 \cdot 100} = 3 \cdot 5 \cdot 10 = 150$
- $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$

- $4^{\frac{3}{8}} \cdot 4^{\frac{5}{8}} = 4^{\frac{8}{8}} = 4^1 = 4$
- $\log_{12} 144 = 2$
- $\log_5 \frac{1}{625} = -4$

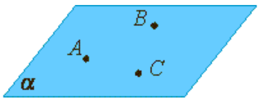
Решение показательных, логарифмических и иррациональных уравнений:

- $3^{4x} = 3^2$; $4x = 2$; $x = ½$
- $\log_7(4x - 3) = 2$; $4x - 7 = 7^2$; $x = 13$
- $\sqrt{x+2} = 4$; $(\sqrt{x+2})^2 = 4^2$; $x + 2 = 16$; $x = 16 - 2$; $x = 14$

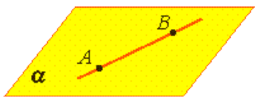
Тема №3 Прямые и плоскости в пространстве.(12ч.)

Аксиомы стереометрии и следствия из них.

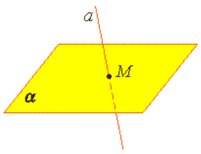
Аксиома 1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.



Аксиома 2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости. (Прямая лежит на плоскости или плоскость проходит через прямую).



Из аксиомы 2 следует, что если прямая не лежит в данной плоскости, то она имеет с ней не более одной общей точки. Если прямая и плоскость имеют одну общую точку, то говорят, что они пересекаются.

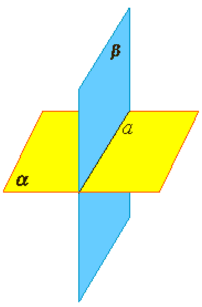


Аксиома 3.

Если две различные плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

В таком случае говорят, плоскости пересекаются по прямой.

Пример: пересечение двух смежных стен, стены и потолка комнаты

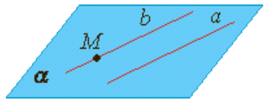


Взаимное расположение прямых, прямой и плоскости, плоскостей в пространстве.

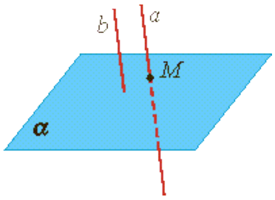
Две прямые в пространстве называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Теорема о параллельных прямых.

Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.

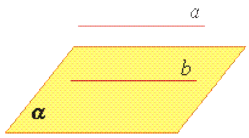


Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.

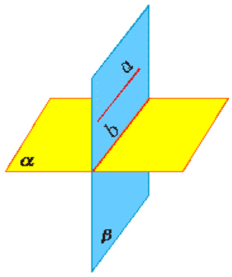


Прямая и плоскость называются *параллельными*, если они не имеют общих точек.

Теорема. Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.

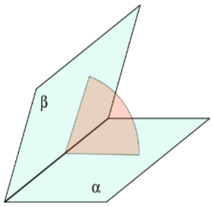


Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая либо также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости.



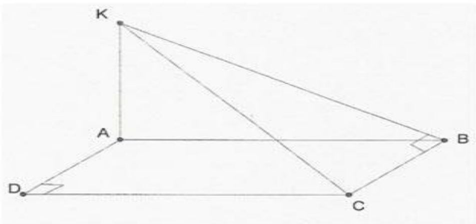
Теорема о трех перпендикулярах. Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной, перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.

Двугранный угол — пространственная геометрическая фигура, образованная двумя полуплоскостями, исходящими из одной прямой, а также часть пространства, ограниченная этими полуплоскостями.



Примеры решения задач.

1.



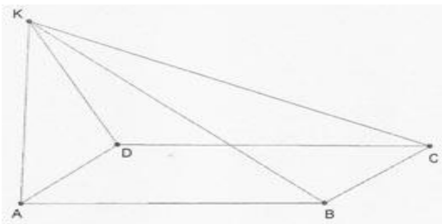
Дано:

ABCD – квадрат,
AK ⊥ (ABCD).

Доказать: BC ⊥ BK.

AK ⊥(ABCD) (по условию),
BK – наклонная,
AB – проекция KB на плоскость (ABCD),
BC ⊥ AB (как смежные стороны квадрата),
тогда BC ⊥ BK (по теореме о трех перпендикулярах).

2. Из вершины прямоугольника ABCD восставлен перпендикуляр AK к его плоскости. Расстояния от точки K до других вершин равны 6 см, 7 см, 9 см. Найдите длину перпендикуляра AK.



Дано:

ABCD – прямоугольник,
AK ⊥ (ABCD)
KD = 6 см, KB = 7 см, KC = 9 см

Найти: AK

1) Δ AKD – прямоугольный. По теореме Пифагора: $KD^2 = AK^2 + AD^2$.
Найдем AD. Заметим, что AD = BC.
2) Рассмотрим Δ KBC:
AK ⊥ (ABCD), BK наклонная, AB – проекция BK на плоскость.
BC⊥ AB (как смежные стороны прямоугольника).
Тогда BC ⊥ BK (по теореме о трех перпендикулярах), т. е. Δ BKC – прямоугольный, $\angle B = 90^\circ$.
3) По теореме Пифагора: $KC^2 = BK^2 + BC^2$. Отсюда следует,
$BC^2 = KC^2 - BK^2 = 81 - 49 = 32$. То есть $AD^2 = 32$.
4) Учитывая 1), имеем: $AK^2 = KD^2 - AD^2 = 36 - 32 = 4$. Значит, AK = 2(см).
Ответ: AK = 2 см.

Тема №4 Векторы и координаты(18ч.).

Вектор – направленный отрезок.

Координаты вектора $\overrightarrow{AB} = (x_в - x_а;\ y_в - y_а;\ z_в - z_а)$

Длина вектора $\vec{a}$ (x; y; z) находится по формуле: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Скалярное произведение векторов: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$

Векторное произведение векторов

$$\vec{c}=\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\cdot\vec{k}=$$

$$=\left(a_y\cdot b_z-a_z\cdot b_y\right)\cdot\vec{i}+\left(a_z\cdot b_x-a_x\cdot b_z\right)\cdot\vec{j}+\left(a_x\cdot b_y-a_y\cdot b_x\right)\cdot\vec{k}$$

Некоторые задачи на векторы

1) Даны векторы $\vec{a}$ (1; 2; 0), $\vec{b}$ (3; 2; 1). Найдите длины данных векторов, скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Решение: длина $|\ \vec{a}\ | = \sqrt{1^2+2^2+0^2}=\sqrt{1+4+0}=\sqrt{5}$; длина $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{3^2+2^2+1^2}=\sqrt{9+4+1}=\sqrt{14}$; скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot 3+2\cdot 2+0\cdot 1=3+4+0=7$

2) Даны точки A(10;- 2; 8), B(8; 0; 7), C(10; 2; 8). Найдите периметр треугольника ABC. Решение: $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(8-10)^2+(0+2)^2+(7-8)^2}=\sqrt{4+4+1}=3$

$$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(10-8)^2+(2-0)^2+(8-7)^2}=\sqrt{4+4+1}=3$$

$$|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{(10-10)^2+(-2-2)^2+(8-8)^2}=\sqrt{0+4+0}=2$$

Периметр P = 3+3+2 =8

Тема № 5 Многогранники и тела вращения.

Многогранник - геометрическое тело, ограниченное со всех сторон плоскими многоугольниками - *гранями*.

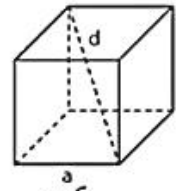
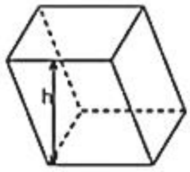
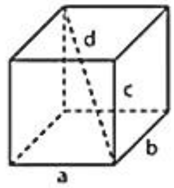
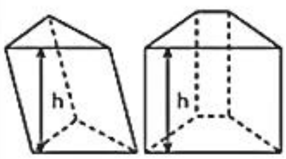
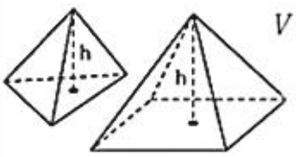
Призма (n-угольная) - это многогранник, две грани которого - равные n-угольники, лежащие в параллельных плоскостях *(основания* призмы), а остальные n граней - параллелограммы *(боковые грани призмы)*. *Боковые ребра* - это отрезки, соединяющие соответствующие вершины оснований.

Поверхность призмы - это *фигура, образованная всеми гранями призмы*. *Боковая поверхн*ость призмы - это фигура, образованная боковыми гранями. *Высота призмы* - это перпендикуляр, опущенный из любой точки одного основания на плоскость другого основания.

Прямая призма - это призма, боковые грани (ребра) которой перпендикулярны основаниям.

Пирамида — многогранник, в основании которого лежит многоугольник, а остальные грани являются треугольниками, которые имеют общую вершину. Пирамида – это частный случай конуса.

МНОГОГРАННИКИ

ОБЪЁМЫ	ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ
 куб $V = a^3$ a – ребро куба	$S = 6a^2$ $d = a\sqrt{3}$ длина диагонали
 параллелепипед $V = S_{осн} \cdot h$	$S = 2S_{осн} + S_{бок}$ $S_{осн}$ – площадь основания h – высота
 прямоугольный параллелепипед $V = a \cdot b \cdot c$	$S = 2ab + 2ac + 2bc$ $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
 призма $V = S_{осн} \cdot h$	$S = 2S_{осн} + S_{бок}$ $S_{осн}$ – площадь основания h – высота
 пирамида $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$	$S = S_{осн} + S_{бок}$

Цилиндром называется тело, которое состоит из двух кругов, совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов. Эти круги называются *основаниями цилиндра*, а отрезки, соединяющие соответствующие точки оснований, — *образующими цилиндра*.

Если образующие перпендикулярны основаниям, то цилиндр называется *прямым цилиндром*.

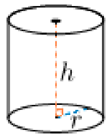
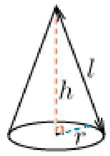
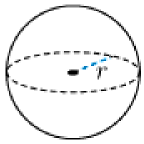
Шар — тело, состоящее из всех точек пространства, находящихся на расстоянии не более R от некоторой точки, которая называется *центром шара*. R называется *радиусом шара*.

Сфера — это поверхность шара. Сфера является множеством точек, отстоящих от ее центра на расстоянии R.

Конус — это тело, которое получается при объединении всех отрезков, соединяющих точки круга *(основание конуса) с вершиной конуса*.

Прямой конус — это конус, вершина которого лежит на прямой, перпендикулярной основанию и проходящей через центр основания. Эта прямая называется *осью прямого конуса*.

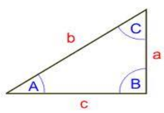
Высота конуса — это отрезок, проведенный из вершины конуса к основанию перпендикулярно основанию конуса. Отрезок, который соединяет вершину конуса с окружностью в основании, называется *образующей конуса*.

 Цилиндр $V = \pi r^2 h$ r - радиус основания h - высота	$S = 2S_{осн} + S_{бок} =$ $= 2\pi r^2 + 2\pi r h$	
 Конус $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$	$S = S_{осн} + S_{бок} =$ $= \pi r^2 + \pi r l$ l - образующая	$l = \sqrt{r^2 + h^2}$
 Шар $V = \frac{4}{3}\pi r^3$	$S = 4\pi r^2$	

Задачи.

1. Осевое сечение цилиндра – квадрат, площадь основания цилиндра равна 16π см^2. Радиус основания цилиндра равен 4 см, а высота цилиндра – 8 см. Найти площадь поверхности цилиндра. Решение: воспользуемся формулой $S = 2 \cdot \pi \cdot 4^2 + 2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 8 = 32\pi + 64\pi = 96\pi$ см^2.
Ответ: площадь поверхности цилиндра S= 96π см^2.
2. Образующая конуса равна 13 см, радиус основания – 5 см. Найти высоту конуса.
Решение: h= $\sqrt{169-25} = \sqrt{144} = 12$
Ответ: h= 12 см.
3. Высота цилиндра равна 3 см, радиус основания – 2 см. Найти диагональ осевого сечения.
Решение: $d = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

Тема № 6 Тригонометрия.



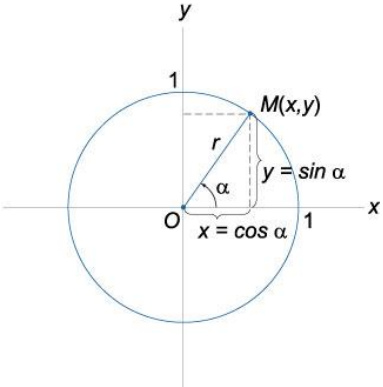
Рассмотрим прямоугольный треугольник:
Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе: sin A=a/b; sin C=c/b

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе: cos A=c/b; cos C= a/b

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему: tg A=a/c; tg C=c/a.

Эти определения тригонометрических функций удобно использовать при решении геометрических задач, связанных с нахождением сторон и углов в прямоугольном треугольнике, однако они не улучшают понимания того, что из себя представляют *тригонометрические функции* именно как функции.

Геометрическое определение тригонометрических функций удобно ввести с помощью *единичного круга*. На приведенном ниже рисунке изображен круг радиусом r=1. На окружности обозначена точка M(x,y). Угол между радиус-вектором OM и положительным направлением оси Ox равен α.



Синусом угла α называется отношение ординаты y точки M(x,y) к радиусу r:
sinα=y/r. Поскольку r=1, то синус равен ординате точки M(x,y).
Косинусом угла α называется отношение абсциссы x точки M(x,y) к радиусу r:
cosα=x/r .
Тангенсом угла α называется отношение ординаты y точки M(x,y) к ее абсциссе x: tg α=y/x, x≠0

Перевод из градусной меры в радианную

$\alpha^\circ = \frac{\alpha\pi}{180}$рад.

Пример. Дан угол $45^\circ = \frac{45\pi}{180}$рад $= \frac{\pi}{4}$рад.

Перевод из радианной меры в градусную

$\alpha = \frac{\alpha}{\pi} \cdot 180^\circ$

Пример. Дан угол $\frac{\pi}{6}$рад. Выразить его величину в градусах. *Решение*. рад $= \frac{\pi}{6 \cdot \pi} \cdot 180^\circ = 30^\circ$.

<u>СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ФУНКЦИЯМИ ОДНОГО И ТОГО ЖЕ АРГУМЕНТА.</u>

1. $Sin^2 x + Cos^2 x = 1$

2. $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$

3. $Ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$

4. $1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

5. $1 + ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

6. $tgx \cdot ctgx = 1$

ЧЕТНОСТЬ И НЕЧЕТНОСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ.

1. $\sin(-x) = -\sin x$
2. $\cos(-x) = \cos x$
3. $tg(-x) = -tgx$
4. $ctg(-x) = -ctgx$

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ.

аргумент	функция			
	sin	cos	tg	ctg
$-\alpha$	- sinα	cos α	- tgα	- ctgα
$\frac{\pi}{2} - \alpha$	cosα	sinα	ctgα	tgα
$\frac{\pi}{2} + \alpha$	cosα	- sinα	- ctgα	- tgα
$\pi - \alpha$	sinα	- cosα	- tgα	- ctgα
$\pi + \alpha$	- sinα	- cosα	tgα	ctgα
$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	- cosα	- sinα	ctgα	tgα
$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	- cosα	sinα	- ctgα	- tgα
$2\pi - \alpha$	- sinα	cosα	- tgα	- ctgα
$2\pi + \alpha$	sinα	cosα	tgα	ctgα

Значение тригонометрических функций некоторых углов.

Функция	Величины угла							
	0^0	30^0 π/6	45^0 π/4	60^0 π/3	90^0 π/2	180^0 π	270^0 3π/2	360^0 2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
$ctg\alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА.

1. $Sin2x = 2SinxCosx$

2. $Cos2x = Cos^2 x - Sin^2 x$

3. $tg\,2x = \dfrac{2tgx}{1 - tg^2 x}$

4. $Ctg\,2x = \dfrac{ctg^2 x - 1}{2ctgx}$

График функции синус $y = \sin x$, область определения: $x \in R$, область значений: $-1 \le \sin x \le 1$

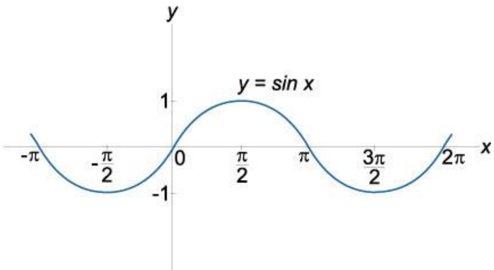


График функции косинус $y = \cos x$, область определения: $x \in R$, область значений: $-1 \le \cos x \le 1$

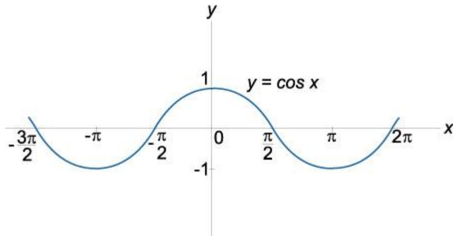


График функции тангенс $y = \text{tg}\, x$, область определения: $x \in R$, $x \ne (2k + 1)\pi/2$, область значений: $-\infty <$ tg $x < \infty$

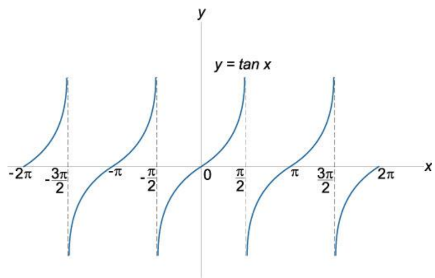
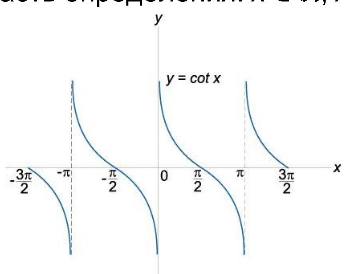


График функции котангенс $y = \text{ctg}\, x$, область определения: $x \in \Re$, $x \ne k\pi$, область значений: $-\infty <$ ctg $x < \infty$



Простейшие тригонометрические уравнения

A	a	-1	0	1
sin x=A	$(-1)^n \arcsin a + \pi n$	$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$	πn	$\frac{\pi}{2} + 2\pi n$
cos x= A	$\pm \arccos a + 2\pi n$	$\pi + 2\pi n$	$\frac{\pi}{2} + \pi n$	$2\pi n$
tg x= A	$arctg\, a + \pi n$	$-\frac{\pi}{4} + \pi n$	πn	$\frac{\pi}{4} + \pi n$
ctg x= A	$arcctg\, a + \pi n$	$\frac{3\pi}{4} + \pi n$	$\frac{\pi}{2} + \pi n$	$\frac{\pi}{4} + \pi n$

Пример . Решить уравнение $\cos^2 x+\cos x-2=0$.

Решение. Это уравнение является квадратным относительно $\cos x$. Поэтому сделаем замену $\cos x=t$. В результате получим уравнение $t^2+t-2=0$. Его корни: $t_1=1,\ \ t_2=-2$, то есть получаем уравнение $\cos x=1$ или $\cos x=-2$. Первое уравнение дает $x=2\pi k,\ \ k\in Z$. Второе уравнение не имеет корней.

Ответ: $x=2\pi k,\ \ k\in Z$.

Пример . Решить уравнение $6\cos^2 x+5\sin x-7=0$.

Решение. Так как $\cos^2 x=1-\sin^2 x$, то уравнение можно представить в виде $6\left(1-\sin^2 x\right)+5\sin x-7=0$; $6\sin^2 x-5\sin x+1=0$. Сделаем замену $t=\sin x$. Получим квадратное уравнение $6t^2-5t+1=0$, решая которое, имеем: $D=25-6\cdot 4=1,\ t_{1,2}=\dfrac{5\pm 1}{12}$,то есть $t_1=\dfrac{1}{2},\ t_2=\dfrac{1}{3}$. Таким образом, получим два простейших уравнения $\sin x=\dfrac{1}{2}$ или $\sin x=\dfrac{1}{3}$. Решая их, имеем $x=(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ \ k\in Z$ или $x=(-1)^k\arcsin\dfrac{1}{3}+\pi k,\ \ k\in Z$.

Ответ: $(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k;\ \ (-1)^k\arcsin\dfrac{1}{3}+\pi k,\ \ k\in Z$

Пример . Решить уравнение:

$$3\sin^2 x-2\sin x\cos x-\cos^2 x=0.$$

Решение. Это уравнение является однородным относительно $\sin x$ и $\cos x$. Поэтому, разделив его на $\cos^2 x$ $\left(\cos x\neq 0\right)$, получим $3tg^2x-2tgx-1=0$. Введем новую переменную $tgx=t$ и решим квадратное уравнение $3t^2-2t-1=0$.

Его корни $t_1=1,\ t_2=-\dfrac{1}{3}$. Получили два простейших тригонометрических уравнения $tgx=1,\ tgx=-\dfrac{1}{3}$. Решая их, найдем: $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$ или $x=-arctg\dfrac{1}{3}+\pi k,\ k\in Z$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}+\pi k;\ \ -arctg\dfrac{1}{3}+\pi k,\ k\in Z$.

Пример . Решить уравнение $\sin 2x-\cos x=0$.

Решение. Применяя формулу синуса двойного угла, получим $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, $\cos x(2\sin x - 1) = 0$. Полученное уравнение равносильно совокупности уравнений: $\cos x = 0,\ 2\sin x - 1 = 0$.

Решение 1-го уравнения: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$.

Уравнение $2\sin x - 1 = 0$ преобразуем к виду $\sin x = \frac{1}{2}$, имеющему решение $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ \ k \in Z$.

Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение

При решении уравнений данным способом необходимо знать формулы:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\quad \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta},\quad \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

Пример . Решить уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) - \sin 2x = 0$.

Решение. По формулам приведения $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \sin 3x$. Получаем уравнение $\sin 3x - \sin 2x = 0$. Пользуясь выше приведенной формулой, преобразуем разность синусов в произведение:

$$\sin 3x - \sin 2x = 2\sin\frac{3x-2x}{2}\cos\frac{3x+2x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}.$$

В результате имеем уравнение $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2} = 0$, откуда $\sin\frac{x}{2} = 0$ или $\cos\frac{5x}{2} = 0$.

Решая эти уравнения, получим $x = 2\pi k,\ k \in Z$; $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}k,\ k \in Z$.

Ответ: $2\pi k,\ \frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}k,\ k\in Z$.

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\qquad \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha},\qquad \operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}.$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)],$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)].$$

Пример . Решить уравнение $\sin 2x\sin 6x=\cos x\cos 3x$.

Решение. Преобразуем по выше приведенным формулам левую и правую части уравнения. В результате получим:

$$\frac{1}{2}\left[\cos(2x-6x)-\cos(2x+6x)\right]=\frac{1}{2}\left[\cos(x-3x)+\cos(x+3x)\right],$$

иначе $\cos 4x-\cos 8x=\cos 2x+\cos 4x$, то есть $\cos 8x+\cos 2x=0$. Преобразовывая теперь в произведение сумму косинусов, будем иметь $2\cos 5x\cos 3x=0$, откуда $\cos 5x=0,\ x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5},\ k\in Z$ или $\cos 3x=0,\ x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3},\ k\in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5},\ \frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3},\ k\in Z$.

Тема № 7 Числовая функция. Свойства и графики некоторых элементарных функций.

Функция является заданной, иначе говоря, известной, если для каждого значения возможного числа аргументов можно узнать соответствующее значение функции. Наиболее распространенные три *способа задания функции:* табличный, графический, аналитический, существуют еще словесный и рекурсивный способы.

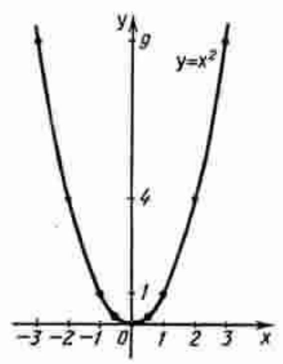
Функция $y = x^n$, где n - натуральное число, называется *степенной функцией* с натуральным показателем. При n = 1 получаем функцию y = x. При n = 2 получаем функцию $y = x^2$.

Заметим, что для натуральных *n* степенная функция определена на всей числовой оси. Для произвольных вещественных *n* это невозможно, поэтому степенная функция с вещественным показателем определена только для положительных *x* .

Функция $y = x^2$.

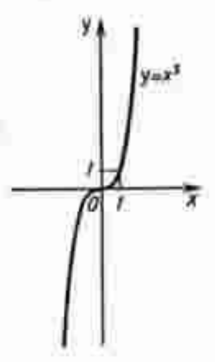
Перечислим свойства функции $y = x^2$.
1) Область определения функции - вся числовая прямая.
2) $y = x^2$ - четная функция ($f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$).
3) На промежутке $[0; +\infty)$ функция возрастает (если $0 \le x_1 < x_2$, то $x_1^2 < x_2^2$, а это и означает возрастание функции).
4) На промежутке $(-\infty; 0]$ функция убывает (если $x_1 < x_2 \le 0$, то $x_1^2 > x_2^2$, а это и означает убывание функции).

Графиком функции $y = x^2$ является **парабола** (см. рис).



Функция $y = x^3$.

Перечислим свойства функции $y = x^3$.
1) Область определения функции - вся числовая прямая.
2) $y = x^3$ - нечетная функция ($f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$)
3) Функция $y = x^3$ возрастает на всей числовой прямой.
График функции $y = x^3$ изображен на рисунке. Он называется **кубической параболой**.



Показательная функция это функция $y(x) = a^x$, зависящая от показателя степени x, при некотором фиксированном значении основании степени a.

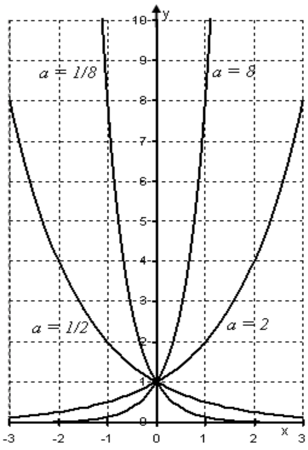
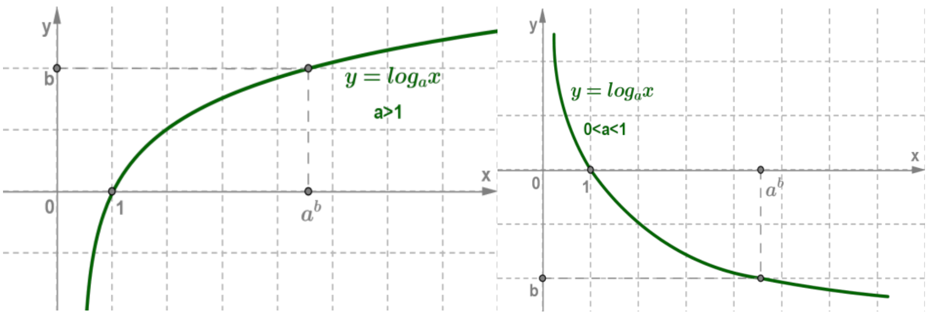


График функции $y = a^x$

На графике представлены значения показательной функции $y(x) = a^x$ для четырех значений *основания степени*: $a = 2$, $a = 8$, $a = 1/2$ и $a = 1/8$. На графике видно, что при $a > 1$показательная функция монотонно возрастает. Чем больше основание степени a, тем более сильный рост. При $0 < a < 1$ показательная функция монотонно убывает. Чем меньше показатель степени a, тем более сильное убывание.

Функцию, заданную формулой $y=\log_a x$ называют логарифмической функцией с основанием а.
(a>0,a≠1)



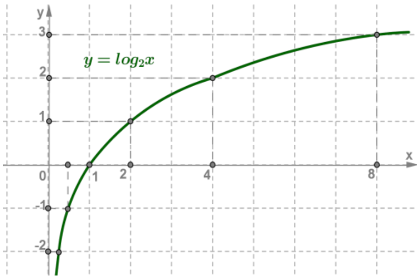
Основные свойства логарифмической функции:

1. Область определения логарифмической функции - множество всех положительных чисел.
D(f)=(0;+∞);
2. Множество значений логарифмической функции - множество R всех действительных чисел.
E(f)=(−∞;+∞);
3. Логарифмическая функция на всей области определения возрастает при a>1 или убывает при 0<a<1.

Обрати внимание! Логарифмическая функция не является ни четной, ни нечетной; не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений; не ограничена сверху, не ограничена снизу;
График любой логарифмической функции $y=\log_a x$ проходит через точку (1;0).

Пример:
1. $y=\log_2 x$*, основание* 2>1

x	14	12	1	2	4	8
y=$\log_2$ x	−2	−1	0	1	2	3



Тема № 8. Теория пределов

Теория пределов

<u>Переменная</u> – это величина, которая в условиях данного процесса может принимать различные значения.

<u>Постоянная</u> – это величина, которая в условиях донного процесса сохраняет одно и то же значение.

Величина y называется функцией переменной величины x, если каждому из тех значений, которые может принимать x, соответствует одно или несколько определенных значений y.

Величина y зависит от величины x, соответственно, величина x называется

независимой переменной или аргументом, y- зависимая переменная или функция обозначается y=f(x).

Совокупность всех значений, которые может принимать аргумент x функции f(x), называется областью определения этой функции.

Предел функции

Постоянное число A называется пределом функции y=f(x) в точке x=a, если для всех x, сколько угодно мало отличающихся от a или при x$\to$a, значение функции y сколь угодно мало отличается от числа A обозначается $\underset{x\to a}{\lambda im} f(x)=A$

Теоремы о пределах

1) Если существуют пределы функций f(x) и γ(x) при x$\to$a, то также существует предел их суммы (разности), равный сумме (разности) пределов функций f(x) и γ(x)

$$\underset{x\to a}{\lambda im}(f(x)\pm\gamma(x))=\underset{x\to a}{\lambda im} f(x)\pm\underset{x\to a}{\lambda im}\gamma(x)$$

2) Если существуют пределы функций f(x) и γ(x), при x$\to a$, то также существует предел их произведения, равный произведению пределов функций f(x) и γ(x)

$$\underset{x\to a}{\lambda im}(f(x)\cdot\gamma(x))=\underset{x\to a}{\lambda im} f(x)\cdot\underset{x\to a}{\lambda im}\gamma(x)$$

3) Если существуют пределы функций f(x) и γ(x), при x$\to$a, предел функции γ(x) отличен от нуля, то также существует предел их отношения, равный отношению пределов функций f(x) и γ(x)

$$\underset{x\to a}{\lambda im}\frac{f(x)}{\gamma(x)}=\frac{\underset{x\to a}{\lambda im} f(x)}{\underset{x\to a}{\lambda im}\gamma(x)}$$

Основные свойства пределов

1) Предел постоянной величины равен этой величине $\lim\limits_{x \to a} A = A$, если A=const

2) Постоянный множитель можно выносить за знак предела $\lim\limits_{x \to a} cf(x) = c \lim\limits_{x \to a} f(x)$,

c= const

Понятие бесконечно малой и бесконечно большой величины

Если предел функции, при x→a равен нулю, то она называется бесконечно малой

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$

Выполняется равенство $\frac{1}{\infty} = 0$

Если предел функции равен бесконечности, при x→a, то она называется бесконечно большой

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Выполняется равенство $\frac{1}{0} = \infty$

Замечательные пределы

1) Первый замечательный предел

Предел отношения синуса бесконечно малой величины x, к самой величине равен 1, при x→0

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Свойства:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tgax}{bx} = \frac{a}{b}$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = 1$

2) Второй замечательный предел

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \to \infty} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

где $e \approx 2,71828$

Примеры:

Вычислить пределы функций:

1) $\lim\limits_{ч \to -1} \left(2x^3 - x^2 - 1\right) = 2(-1)^3 - (-1)^2 - 1 = -4$

2) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2}{3x - 6} = \frac{2}{6 - 6} = \frac{2}{0} = \infty$

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{2x - 4} = \frac{1}{2\infty - 4} = \frac{1}{\infty} = 0$

4) $\lambda im_{x\to\infty}\frac{5x^2-3x+1}{2x-x^2}=\lambda im_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{2x}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}}=\lambda im_{x\to\infty}\frac{5-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x}-1}=\frac{5-\frac{3}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{\frac{2}{\infty}-1}=\frac{5-0+0}{0-1}=-5$

5) $\lambda im_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}=\frac{4-10+6}{4-4}=\frac{0}{0}$

$x^2-5x+6=0$

$D=b^2-4ac; a=1; b=-5; c=6$

$D=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=1$, D>0 (2x)

$x_1=\frac{5+\sqrt{1}}{2}=3$; $x_2=\frac{5-\sqrt{1}}{2}=2$

$x^2+5x+6=(x-3)(x-2)$

$x^2-4=(x-2)(x+2)$

$=\lambda im_{x\to 2}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lambda im_{x\to 2}\frac{x-3}{x+2}=\frac{-1}{4}$

6) $\lambda im_{x\to\infty}(1+2x)^{\frac{3}{4x}}$, пусть $y=\frac{1}{2x}$, $y\to 0$, тогда

$$\lambda im_{y\to 0}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{3}{4\cdot\frac{1}{2x}}}=\lambda im_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{3y}{2}}=\left(\lambda im_{y\to 0}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right)^{\frac{3}{2}}=e^{\frac{3}{2}}$$

Тема № 9 Дифференциальное исчисление

Производная функции

Дана функция y=f(x), x_1 и x_2 – два значения аргумента,$y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$ – соответствующие значения функции.

Разность $x_2-x_1=\Delta x$ называется приращением аргумента , а разность

$y_2-y_1=f(x_2)-f(x_1)=\Delta y$ называется приращением функции на отрезке $[x_1;x_2]$

Производной функции y=f(x) по переменной x называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда Δx→0

$$y'(x)=\lambda im_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Процесс нахождения производственной функции называется *дифференцированием.*

Второй производной функции y=f(x), или производной второго порядка, называется производная от производной первого порядка $f''(x)=(f'(x))'$

Геометрический смысл, производной к графику функции в точке касания

$k=f'(x_0)$ или $k=tg\alpha$, где α – угол наклона касательной к оси абсцисс.

Управление касательной имеет вид $f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

Производная сложной функции

Функция называется сложной, или аргументом функции является функция, т.е. $y=f(g(x))$, её производная определяется по формуле $y'=f'(g(x))\cdot g'(x)$

Пример:

$$y=2\sin^2 3x$$

$$y' = \left(2\sin^2 3x\right)' = 2 \cdot 2\sin 3x \cdot (\sin 3x)' = 4\sin 3x \cdot \cos 3x \cdot (3x)' = 12\sin 3x \cos 3x$$

Формулы производных

1) $(u+v)' = u' + v'$

2) $(u-v)' = u' - v'$

3) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Таблица производных

1) $(c)' = 0$, *c=const*

2) $(cu)' = c' \cdot u'$, c=const

3) $\left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$

4) $(x)' = 1$

5) $\left(a^x\right)' = a^x \lambda na$

6) $\left(e^x\right)' = e^x$

7) $(\lambda nx)' = \frac{1}{x}$

8) $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

9) $(\sin x)' = \cos x$

10) $(\cos x)' = -\sin x$

11) $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

12) $(ctgx) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15) $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$

16) $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

17) $(\lambda og_a x)' = \frac{1}{x\lambda na}$

Примеры:

Найти производные функций:

1) $y = 2^x - 3x^4 + e^x$

$$y' = \left(2^x - 3x^4 + e^x\right)' = \left(2^x\right)' - \left(3x^4\right)' + \left(e^x\right)' = 2^x \lambda n 2 - 12x^3 + e^x$$

2) $y = x^2 \cdot \sin x$

$$y' = \left(x^2 \cdot \sin x\right)' = \left(x^2\right)' \cdot \sin x + x^2 \cdot (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x = x(2\sin x + \cos x)$$

3) $y = \dfrac{x^3}{1-x}$

$$y' = \frac{\left(x^3\right)' \cdot (1-x) - x^3(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{3x^2(1-x) + x^3}{(1-x)^2} = \frac{x^2(3 - 3x + x)}{(1-x)^2} = \frac{x^2(3-2x)}{(1-x)^2}$$

4) $y = 5x^4 - 2\cos x + 6ctgx$

$$y' = \left(5x^4 - 2\cos x + 6ctgx\right)' = 20x^3 + 2\sin x - \frac{6}{\sin^2 x}$$

5) $y = \sqrt{1+x^2}$

$$y' = \left(\sqrt{1+x^2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1+x^2\right)' = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

6) $y = \sin^4 x$

$$y' = \left(\sin^4 x\right)' = 4\sin^3 x \cdot (\sin x)' = 4\sin^3 x \cdot \cos x$$

7) $y = \cos 5x$

$$y' = (\cos 5x)' = -\sin 5x \cdot (5x)' = -5\sin 5x$$

Исследование функций с помощью производной

Функция y=f(x) монотонно *возрастает,* если большему значению аргумента x соответствует большее значение функции f(x).

Условие возрастания функции на интервале: если производная функции на интеграле [а;в] положительна, то функция возрастает на данном интервале.

Функция y=f(x) монотонно *убывает*, если большему значению аргумента x соответствует меньшее значение функции f(x).

Условие убывания функции на интервале: если производная функции на интервале [а;в] отрицательна, то функция убывает на этом интервале.

Точки максимума и минимума функции называют *точками экстремума* функции.

<u>Исследование функции на экстремумы</u> с помощью производной

1) Найти производную функции $f'(x)$

2) Найти критические точки функции y=f(x), т.е. точки, в которых производная функции обращается в нуль или не существует.

3) Исследовать знак производной , в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции. Если при переходе через критическую точку производная функции меняет знак с «-» на «+» то это точка минимума. Если при переходе через критическую точку производная меняет знак с «+» на «-», то это точка максимума.

4) Вычислить значение функции в точках экстремума.

<u>Исследование функции на перегиб</u> с помощью производной

1) Найти вторую производную функции.
2) Найти критические точки второго рода, т.е. те точки, в которых вторая производная обращается в нуль или не существует.

3) Исследовать знак второй производной в промежутках, на которые найдены критические точки делят область определения функции y=f(x). Если при переходе через критическую точку вторая производная меняет знак, то данная точка является абсциссой точки перегиба графика функции.

4) Вычислить значение функции в точках перегиба

Общая схема построения графиков функций

1) Найти область определения функции.
2) Проверить функцию на четность:

если f(x)=f(-x) – функция четная,
если f(x)=-f(x) – функция нечетная,
если не выполняются оба равенства, то функция ни четная, ни нечетная.

3) Найти точки пересечения графика функции с осями координат (если это не вызывает затруднения)
4) Исследовать функцию на монотонность и экстремумы.
5) Найти промежутки выпуклости графика функции и точки перегиба.
6) Построить график, используя полученные результаты исследования

Пример:

Исследовать функцию и построить график

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2$

1) область определения функции: $D(x)=(-\infty;+\infty)$
2) проверим функцию на четность

$f(-x)=\frac{1}{3}(-x)^3-2(-x)^2$

$f(-x)=-\frac{1}{3}x^3-2x^2$

$f(x)\neq f(-x)$

$-f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2$

$-f(x)\neq f(x)$

Значит, функция ни четная, ни нечетная.

3) найти точки пересечения графика с осями координат:

0X: y=0

$\frac{1}{3}x^3-2x^2=0$

$x^2\left(\frac{1}{3}x-2\right)=0$

$x^2=0$ или $\frac{1}{3}x-2=0$

$x=0$ или $\frac{1}{3}x=2$

$x=6$

$(0;0)$ и $(6;0)$

0У: x=0

$y=\frac{1}{3}\cdot 0-2\cdot 0=0$

$(0;0)$

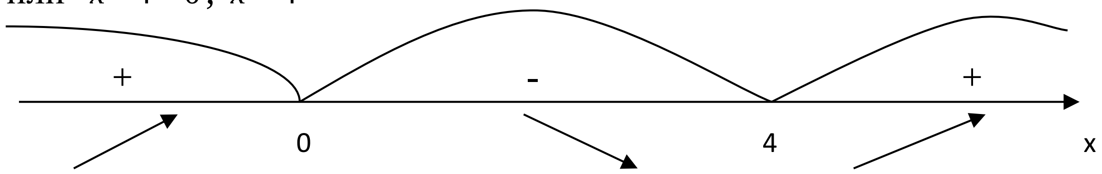
4) Исследуем функцию на монотонность и экстремумы

$f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2\right)=\frac{1}{3}\cdot 3x^2-2\cdot 2x=x^2-4x$

$x^2-4x=0$

$x(x-4)=0$

$x=0$ или $x-4=0$, $x=4$



$x_{\max}=0;\quad x_{\min}=4$

$f(x)_{\max}=\frac{1}{3}\cdot 0-2\cdot 0=0$

$f(x)_{\min}=\frac{1}{3}\cdot 4^3-2\cdot 4^2=\frac{64}{3}-32=-10\frac{2}{3}$

$(0;0)$ - точка максимума

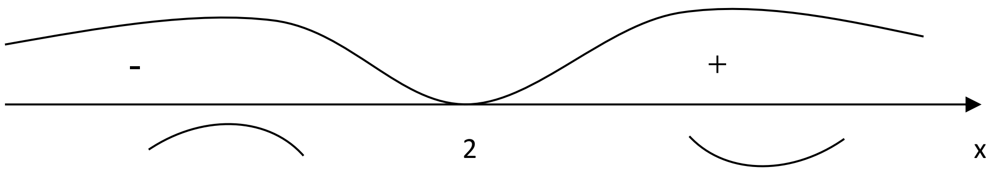
$\left(4;-10\frac{2}{3}\right)$ - точка минимума

5) Исследуем функцию на выпуклость

$f''(x)=\left(x^2-4x\right)'=2x-4$

$2x=4$

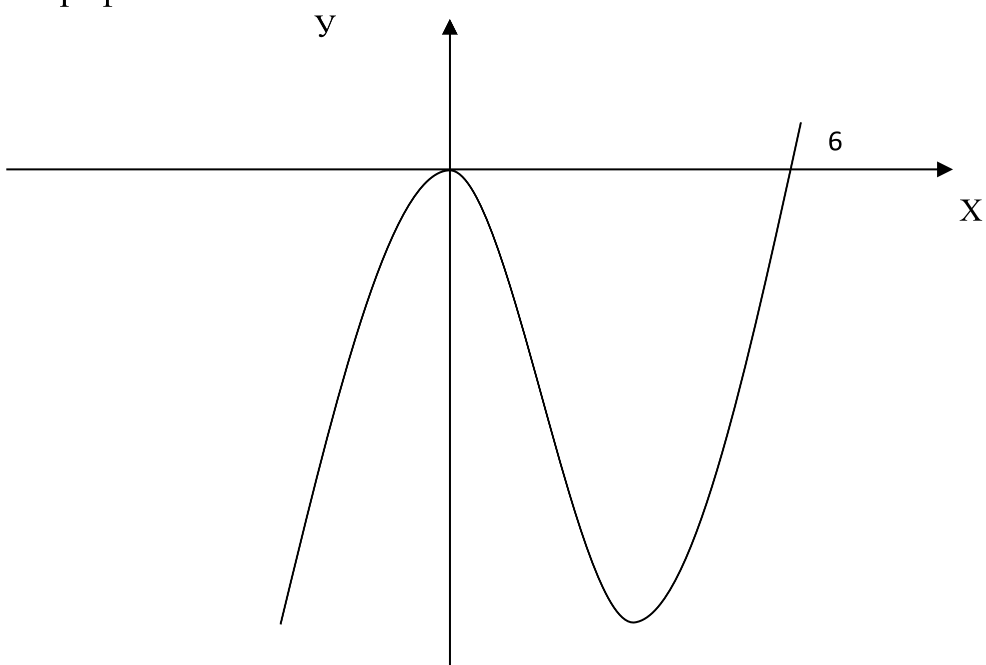
$x=2$



$f(2)=\frac{1}{3}\cdot 2^3-2\cdot 2^2=\frac{8}{3}-8=\frac{8-24}{3}=\frac{-16}{3}=-5\frac{1}{3}$

$\left(2;-5\frac{1}{3}\right)$ - точка перегиба

6) строим график



Тема № 10 Интегральное исчисление

Дифференцируемая функция F(x), где $x \in (a;в)$ называется первообразной для функции f(x) на интервале (а;в), если $F'(x) = f(x)$ для любого х из интервала (а;в)

Совокупность $F(x)+c$ всех первообразных функций f(x) на интервале (а;в) называют *неопределенным интегралом* от функции f(x) и обозначают $\int f(x)dx = F(x)+c$, где f(x) – подынтегральная функция

f(x)dx – подынтегральное выражение

х – переменная интегрирования

с – произвольная постоянная

Основные формулы интегрирования

1) $\int dx = x + c$

2) $\int x^2 dx = \dfrac{x^{2+1}}{2+1} + c$

3) $\int \dfrac{dx}{x} = \lambda n|x| + c$

4) $\int e^x dx = e^x + c$

5) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\lambda n a} + c$

6) $\int \sin x dx = -\cos x + c$

7) $\int \cos x dx = \sin x + c$

8) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$

9) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$

10) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$

11) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + c$

Способы интегрирования

1) Непосредственное интегрирование. Метод, при котором данный интеграл сводится к табличному.

Пример:

$$\int \left(x^5 - \sqrt[3]{x} + \cos x\right)dx = \int x^5 dx - \int x^{\frac{1}{3}} dx + \int \cos x dx = \frac{x^6}{6} - \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + \sin x + c =$$

$$= \frac{x^6}{6} - \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + \sin x + c = \frac{x^6}{6} - \frac{3}{4\sqrt[3]{x^4}} + \sin x + c$$

2) Интегрирование методом подстановки.

Пример:

$\int \dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$ пусть $\begin{array}{l} t = 1 + x^2 \\ dt = 2xdx \\ xdx = \dfrac{dt}{2} \end{array}$, тогда $\int \dfrac{\frac{dt}{2}}{\sqrt{t}} = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{dt}{t^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}} dt = \dfrac{1}{2} = \dfrac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{t} + c = \sqrt{1+x^2} + c$

3) Интегрирование по частям.

Общая формула интегрирования по частям:
$\int u dv = u \cdot v - \int v du$
Пример:
$\int x \cos x dx$
Пусть $x = u$, $\cos x dx = dv$, тогда $dx = du$; $v = \int \cos x dx = \sin x$
$\int x \cos x dx = x \cdot \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + c$
Определенный интеграл
Определенным интегралом функции y=f(x) при изменении аргумента от x=a до x=в называется приращением F(в)-F(a) любой из первообразных функций вида F(x)+c

$$\int_a^в f(x)dx$$

а – нижний предел интегрирования
в – верхний предел интегрирования
Для вычисления определенного интеграла используем формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\begin{cases} b \\ a \end{cases} = F(b) - F(a)$$

Пример № 1:

$$\int_1^2 (x^2+2)dx = \frac{x^3}{3} + 2x\begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} = \left(\frac{8}{3}+4\right) - \left(\frac{1}{3}+2\right) = \frac{13}{3}$$

Пример № 2:

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} \quad \text{пусть} \quad \begin{matrix} t = 1+x \\ dt = dx \\ t_в = 1+3 = 4 \\ t_н = 1+0 = 1 \end{matrix}, \quad \text{тогда} \quad \int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int_1^4 \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}} = \int_1^4 t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases} = 2\sqrt{t}\begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases} = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1} = 2$$

Тема № 11 Теория вероятности и математическая статистика

Элементы комбинаторики.

Задачи, в которых производится подсчет возможных различных соединений, составленных из конечного числа элементов по некоторому правилу, называются комбинаторными.

Раздел математики, занимающийся решением таких задач, называется комбинаторикой.

Группы, составленные из каких-либо элементов, называются соединениями.

Различают 3 основных вида соединений: размещения, перестановки и сочетания.

1) Размещения

Размещениями из n элементов по m называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами (хотя бы одним), либо порядком их следования. Число размещений из n элементов по m обозначается A_n^m и вычисляется по формуле

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-(m-1))$$

Пример:

Найти число размещений из 10 элементов по 4

$$A_{10}^{4} = 10(10-1)(10-2)(10-3) = 10\cdot9\cdot8\cdot7 = 5040$$

2) <u>Перестановки</u>

Перестановками из n элементов называются такие соединения из n элементов, которые отличаются друг от друга лишь порядком следования элементов.

Перестановки представляют собой частный случай размещения из n элементов по n в каждом, т.е.

$P_n = A_n^n$

Произведение $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$ первых натуральных чисел обозначается знаком n!

Поэтому $P_n = n!$ (0!=1, 1!=1)

Тогда

$$A_n^m = \frac{p_n}{p_{n-m}} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

При решении задач удобно использовать очевидное равенство

$$A_n^{m+1} = (n-m)A_n^m$$

Примеры:

1. Вычислить значение выражения 3!+5!

Решение: $3!+5! = 3\cdot2\cdot1+5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 6+120 = 126$

2. Сколькими способами можно расставлять на полке 6 книг

$P_n = 6! = 6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 720$

3) <u>Сочетания</u>

Сочетаниями из n элементов по m называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Примеры:

1) Вычислить значение выражения $C_6^4 + C_5^0$

Решение: $C_6^4 + C_5^0 = \frac{6!}{4!(6-4)!} + \frac{5!}{0!(5-0)!} = \frac{6\cdot5\cdot4!}{4!\cdot2\cdot1} + 1 = 15 + 1 = 16$

2) В бригаде из 25 человек нужно выделить четырех для работы на определенном участке. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: $C_{25}^4 = \frac{25\cdot24\cdot23\cdot22}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 12650$

Элементы теории вероятностей

Изучение каждого явления в порядке наблюдения или производства опыта связано с осуществлением некоторого комплекса условий (испытаний).

Всякий результат или исход испытания называется *событием*. Если событие при заданных условиях может произойти или не произойти, то оно называется случайным. В случае, когда событие должно непременно произойти, его называют достоверным, а в случае, когда оно заведомо не может произойти,- невозможным.

События называются несовместными, если каждый раз возможно появление только одного из них. События называются совместными, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключают появления другого при том же испытании.

События называются противоположными, если в условиях испытания они, являясь единственными его исходами, несовместны.

Вероятностью события А называется отношение числа исходов m, благоприятствующих наступлению данного события А, к числу n всех исходов, т.е.

$P(A) = \frac{m}{n}$

Вероятность любого события не может быть меньше нуля и больше единицы.

Примеры:

1) В урне 3 белых и 9 черных шаров. Из урны наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется черным?

Решение: имеем n=3+9=12, m=9, поэтому

$P(A)= \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

2) В урне 4 белых и 7 черных шаров. Из урны одновременно вынимают 2 шара. Какова вероятность того, что оба шара белые (событие А)?

Решение:

Здесь число элементарных событий $n= C_{11}^2 = \frac{11\cdot 10}{1\cdot 2} = 55$

Число случаев, благоприятствующих событию А: $m=C_4^2 = 6$

Следовательно $P(A) = \frac{6}{55}$

<u>Теорема сложения вероятностей несовместных событий</u>

Вероятность одного из попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$P(A+B) = P(A) + P(B)$

<u>Теорема сложения вероятностей совместных событий.</u>

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$P(A+B) = P(A) + P(B) – P(AB)$

Пример:

Найти вероятность того, что при бросании двух игральных костей хотя бы один раз выпадет 6 очков.

Решение:

Пусть «А» - выпадение 6 очков при бросании первой игральной кости

«В» - выпадение 6 очков при бросании второй игральной кости

Т.к. события А и В совместны, то $P(A+B)= P(A) + P(B) – P(AB)$

$P(A)= \frac{1}{6}$; $P(B)= \frac{1}{6}$; $P(AB)= \frac{1}{36}$;

$P(A+B)= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$

Событие, противоположное событию А обозначается $\overline{A}$. Сумма вероятностей двух противоположных событий равна единице

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$

Пример: Вероятность того, что день будет ясным, P=0,85. Найти вероятность q того, что день будет облачным.

Решение: события «день ясный» и день «облачный» - противоположные, поэтому p+q=1

Значит q= 1 – p = 1 – 0,85 = 0,15

Теоремы умножения вероятностей.

Условная вероятность.

Под условной вероятностью события В при условии А понимают вероятность события В, вычисленную в предположении, что событие А наступило и обозначают $P(B|A)$.

Пример:

В урне 4 белых и 3 черных шара. Из урны последовательно вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что второй шар окажется черным при условии, что первый шар был черным.

Решение:

Событие «А» - первый шар черный

Событие «В» - второй шар черный

Если произошло событие А, то в урне осталось 6 шаров, из которых 2 черных. Поэтому Р $(A|B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

1) Теорема умножения вероятностей независимых событий

Вероятность совместного появления (или произведения) двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий

Р(АВ) = Р(А) · Р(В)

Пример:

В одной урне 4 белых и 8 шаров, в другой – 3 белых и 9 черных шаров. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

Решение:

Событие «А» - появление белого шара из первой урны

Событие «В» - появление белого шара из второй урны

События А и В – независимые, Р(А) = $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$; Р(В) = $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

Получим Р(АВ) = $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}=0{,}083$

Математическая статистика – это раздел математики, изучающий методы сбора, систематизации, обработки и использования статистических данных для получения научно обоснованных выводов и принятия решения.

Под статистическими данными понимают совокупность чисел, представляющих количественные характеристики признаков изучаемых объектов.

Теоретической основой математической статистики является теория вероятности.

Основными понятиями математической статистики являются генеральная совокупность и выборочная совокупность.

Генеральной совокупностью называется множество числовых значений некоторого признака всех объектов, рассматриваемой совокупности.

Выборочной совокупностью или просто *выборкой* называется множество числовых значений некоторого признака всех объектов, случайным образом отобранных из генеральной совокупности.

Число объектов, входящих в генеральную совокупность, называют *объемом генеральной совокупности* и обозначают N.

Число объектов, входящих в выборку называют *объемом выборки* и обозначают n.

Изучение статистических данных обычно начинается с их группировки в порядке возрастания значения признака.

Наблюдаемые значения рассматриваемого признака называются *вариантами*, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, называется *выборочным или вариационным рядом*.

Пусть из генеральной совокупности отобрана выборка, в которой значение x_1, признака X наблюдалось n_1 раз, значение $x_2 - n_2$ раз, …., значение $x_k - n_k$ раз, то числа n_1, $n_2, \ldots,$ n_k называют частотами вариант, а их отношение к объему выборки, т.е. $\omega = \frac{n_i}{n}$ – относительными частотами соответствующих вариант.

Статистическим распределением выборки называется перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот.

Пример: найти вариационный ряд, частоты, относительные частоты для выборки, полученной при измерении электрической ёмкости двадцати пластин пьезоэлементов в пикофарадах по следующим результатам: 9,9; 11; 9,2; 12; 8; 8,7; 7; 11,8; 11,7; 10,3; 11,2; 8,1; 9,5; 11,5; 11,6; 9,7; 10,2; 11,4; 8,6; 10.

Решение: вариационный ряд для данной выборки имеет вид: 7; 8; 8,1; 8,6; 8,7; 9,2; 9,5; 9,7; 9,9; 10; 10,2; 10,3; 11; 11,2; 11,4; 11,5; 11,6; 11,7; 11,8; 12.

Каждая варианта встречается один раз, следовательно, $n_i=1$ для всех i=1, 2,3….,20. Равными также будут и относительные частоты $\omega_i = \frac{1}{20}$.

Геометрическая интерпретация статистических распределений выборки.

Если на оси абсцисс прямоугольной системы координат расположить варианты x_i, а на оси ординат соответствующие им частоты, то в плоскости получим точки (x_i; n_i). Соединим точки (x_i; n_i) отрезками прямых.

Ломаная линия, отрезки которой соединяют точки (x_i; n_i), называют полигоном частот.

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, построенных на частичных интервалов с длиной d и высотой, равной $\frac{n_i}{d}$ (плотность частоты на данном интервале).

Числовые характеристики выборки.

<u>Выборочное среднее.</u>
Выборочным средним $\overline{x_{в}}$ выборки объема n со статистическим распределением

X_i	X_1	X_2	……	X_r
n_i	n_1	n_2	…….	n_r

называется среднее арифметическое значений признака выборки

$$\overline{x_{\text{в}}} = \frac{x_1 n_{1+} x_2 n_{2+\cdots\ldots+} x_r n_r}{n}$$

Пример: вычислить среднее выборочное для выборки

X_i	1	2	3	4	5	6
n_i	1	1	3	4	11	5

Решение:

$$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 11 + 6 \cdot 5}{1 + 1 + 3 + 4 + 11 + 5} = \frac{113}{25} = 4{,}52$$

Выборочная дисперсия.

Выборочной дисперсией $D_{\text{в}}$ некоторой выборки называется среднее арифметическое квадратов отклонений значений признака от выборочной средней $\bar{x}_{\text{в}}$.

$D_{\text{в}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{r} n_i (x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2.$

Дисперсия равна разности среднего арифметического значений квадратов признака и квадрата среднего значения признака

$$D = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$$

Дисперсия является характеристикой рассеяния значений признака вокруг своего среднего значения.

Квадратный корень из выборочной дисперсии называю средним квадратическим отклонением:

$$\sigma_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}}\,.$$

Мода и медиана дискретного вариационного ряда.

Модой дискретного вариационного ряда называется вариант, имеющий наибольшую частоту.

Медианой дискретного вариационного ряда называется вариант, делящий ряд на две равные части.

Тема № 12 Основные методы решения уравнений

Уравнение определено как “два выражения, соединенные знаком равенства; в эти выражения входят одна или несколько переменных, называемых неизвестным. *Решить уравнение* – значит найти все те значения неизвестных (*корни* или *решения уравнения*), при которых оно обращается в верное равенство или установить, что таких значений нет”. Определения отдельных видов уравнений (неравенств) — линейных, квадратных, вообще n-й степени, рациональных, иррациональных, простейших тригонометрических, показательных, логарифмических — вводятся в связи с изучением соответствующих функций.

Показательными уравнениями называют такие уравнения, в которых неизвестное содержится только в показателе степени.

Решение показательных уравнений обычно сводится к решению уравнения $a^x = a^b$, где $a>0, a \neq 1,$ x – неизвестное. Данное уравнение имеет единственный корень $x = b$ согласно теореме:

Теорема 1. Если $a>0, a \neq 1$ и $a^{x_1} = a^{x_2}$, то $x_1 = x_2$.

Выделяют три основных метода решения показательных уравнений:

1. Функционально-графический метод. Основан на использовании графических иллюстраций и свойств функций.

2. Метод уравнивания показателей. Основан на теореме 1.

3. Метод введения новой переменной.

Показательными неравенствами называют неравенства вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, где $a>0, a \neq 1$, и неравенства, сводящиеся к этому виду.

Теорема 2. Показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству того же смысла $f(x) > g(x)$, если $a>1$;

показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству противоположного смысла $f(x) < g(x)$, если $0<a<1$.

1. Решить уравнение:

$$4^{x+3} + 4^x = 260$$

$4^x \cdot 4^3 + 4^x = 260$

$4^x \cdot (4^3 + 1) = 260$

$4^x \cdot 65 = 260$

$4^x = 260 \div 65$

$4^x = 4^1$

x=1

Иррациональными называют уравнения в которых неизвестная величина находится под знаком корня определенного степени. Простейшие иррациональные уравнения решаются или подъемом в степень или заменой . Сложные иррациональные уравнения сводятся к предыдущим некоторыми искусственными методами . Например, уравнение сводится к квадратному

Пример **.** Найти решение уравнения

$\sqrt{3x+7}=4.$

Решение:

Находим область допустимых значений

$\sqrt{3x+7}\geq 0 \Rightarrow x\geq -\frac{7}{3}.$

Возводим обе части уравнения в квадрат и решаем

$3x+7=16;$

$3x=16-7=9 \Rightarrow x=3.$

Получили решение $x=3$.

Неравенством называется запись, в которой функции соединены знаком (или несколькими знаками) отношения ">", "<", " ≤ ", " ≥ ".

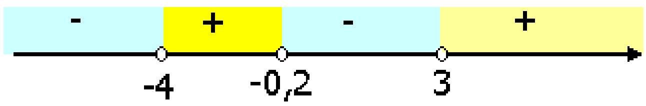
Неравенства f(x) > g(x), f(x) < g(x), называются строгими, а неравенства f(x) ≤ g(x), f(x) ≥ g(x) — нестрогими.

Пример**.** Решить неравенство (2x - 6)(3x + 12)(5x + 1)<0.

Решение.

Нули функции: - 4; - 0,2; 3.

Функция в левой части неравенства представляет собой произведение не повторяющихся множителей, значит знаки этой функции чередуются справа налево с "+" на "-" ....



Решение данного неравенства x ∈ (- ∞ ; -4) ∪ (-0,2; 3).

Практические задания для самостоятельной работы

1. Вычислить разность приближенных значений чисел

a= 5, 863 ± 0,0005 и b= 2,746± 0,05

2. Известно, что 0,333 является приближенным значением для 1/3. Найти абсолютную и относительную погрешности приближения.

3. Вычислить: $\sqrt[3]{27}$; $\frac{\sqrt[5]{256}}{\sqrt[5]{8}}$; $\sqrt{16\cdot 25}$; $81^{\frac{1}{2}}$; $2^{\frac{5}{6}}\cdot 2^{\frac{1}{6}}$; $\log_{27}243$; $\ln 1$

4. Решить уравнение: $\log_7(4x-3)=2$

5. Решить уравнение: $4^x = 8$

6. Построить график функции $y = 3^x$

7. Задача. В треугольнике ABC дано: угол С 90°, AC=6см, BC=8см, CM – медиана. Через вершину С проведена прямая СК, перпендикулярная к плоскости треугольника ABC, причем СК=12см. Найдите КМ.

8. Найти координаты вектора АВ и его длину, если А(3; - 1; 2), В(2; - 1; 4)

9. Найти скалярное и векторное произведение векторов, если $\vec{a}(1; 4; 7), \vec{b}(5; 2; -1)$

10. Задача. Основанием пирамиды DABC является треугольник ABC, у которого AB=AC= 13см, BC = 10см; ребро AD перпендикулярно к плоскости основания и равно 9см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

11. Задача. Площадь осевого сечения конуса равна 0,6$см^2$. Высота конуса равна 1,2см. Вычислите площадь полной поверхности конуса.

12. Задача. Площадь сечения сферы, проходящего через ее центр, равна 9 $м^2$. Найдите площадь сферы.

13. Чему равна радианная мера дуг: 210°, 300° ?

14. Чему равна градусная мера дуг : $7\pi/6$ и $5\pi/4$?

15. Решить тригонометрические уравнения:

а) sin 2x = ½

б) $2\cos^2 x - 2\cos x - 4 = 0$

в) sin 2x· cos x + cos 2x· sin x = 0

16. Построить график функции y=sin 2x

17. Построить график функции y = $\log_{1/2} x$

18. Решить графически уравнение: $2^x = x^2$

19. Вычислить пределы функций:

а) $\lambda im_{x\to 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 9x + 20}$; б) $\lambda im_{x\to\infty} \frac{x^4 + 6x^5}{3x^5 - 2}$; в) $\lambda im_{x\to 1}\left(x^3 - 2x + 4\right)$; г) $\lambda im_{x\to\infty}\left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$

20. Найти производные функций:

а) $y = x^4 \cdot \sin x$; б) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$; в) $y = \frac{3x}{2 - x}$; г) $y = tg 2x$

21. Исследовать функцию и построить график:

$y = x^3 - 3x - 2$

22. Вычислите неопределенный интеграл:

а) $\int (x^3 - 2x + 4)dx$; б) $\int (x-4)^7 dx$; в) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$; г) $\int (x^3 - 2)x^2 dx$

23. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_1^3 (3x^2 + 2x - 1)dx$; б) $\int_0^2 (2-x)^4 dx$

24. Задача. В ящике 300 деталей первого сорта, 200 деталей второго сорта, 50 деталей третьего сорта. Наудачу вынимают одну деталь. Чему равна вероятность вынуть деталь первого, второго, третьего сорта?

25. Задача. Вероятность попадания в цель при одном выстреле составляет 0,8. Найти вероятность четырех попаданий при шести выстрелах.

26. В результате измерений получены результаты: 1, 2, 5,6, 7,9,4, 6, 7, 3, 2, 1, 1, 6, 9, 5, 4, 7, 5, 7. Составить статистическое распределение выборки, построить полигон частот, найти выборочное среднее, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, определить значение моды и медианы.

27. Решить уравнение:

$$5^{2x+1} - 26 \cdot 5^x + 5 = 0$$

28. Решить уравнение: $\sqrt{4x - 3} = -4$

29. Решить неравенство: $6^{x^2 - 7x + 12} > 1$

30. Решить уравнение: $\log_x 16 - \log_x 2 = \frac{1}{2}$

31. Найти сумму и разность комплексных чисел (2+ 3i) и (- 3 + 4i)

Примерные вопросы к экзамену по математике.

1. Степень с действительным показателем. Действия над степенями с действительным показателем. Арифметический корень и его свойства.
2. Логарифм. Свойства логарифма.
3. Взаимное расположение прямой и плоскости, двух плоскостей. Признак параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости, двух плоскостей.
4. Наклонная и перпендикуляр. Теорема о трех перпендикулярах.
5. Основные понятия и определения векторов. Действия над векторами. Базис. Коллинеарные и компланарные векторы. Разложение вектора по заданному базису.
6. Действия над векторами, заданными своими координатами. Длина вектора. Скалярное произведение векторов и его свойства. Векторное произведение векторов и его свойства.
7. Способы задания прямой.

8. Призма. Виды призм. Сечение призмы плоскостью. Площадь поверхности призмы. Объем прямой призмы.
9. Пирамида. Площадь боковой поверхности пирамиды. Усеченная пирамида. Площадь боковой поверхности усеченной пирамиды. Объем пирамиды.
10. Уравнение сферы. Площадь сферы, объем шара.
11. Конус. Площадь поверхности конуса. Площадь поверхности усеченного конуса. Объем конуса.
12. Цилиндр. Площадь поверхности цилиндра. Объем цилиндра
13. Аксиомы стереометрии.
14. Радианное измерение углов. Тригонометрические функции числового аргумента.
15. Соотношения между тригонометрическими формулами числового аргумента.
16. Периодичность, четность тригонометрических функций.
17. Тригонометрические функции суммы и разности двух аргументов. Тригонометрические функции двойного аргумента.
18. Уравнение вида $\sin x=a$ и его решение. Уравнение вида $\cos x=a$ и его решение.
19. Основные тригонометрические тождества.
20. Комплексные числа. Действия над комплексными числами в алгебраической форме. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.
21. Степенная функция. Ее свойства и график.
22. Показательная функция. Ее свойства и график.
23. Логарифмическая функция. Ее свойства и график.
24. Свойства и график функции $y=\sin x$.
25. Обратные тригонометрические функции (определение).
26. Предел функции в точке. Теоремы о пределах функций(без доказательств).
27. Непрерывность функции в токе и на отрезке. Точки разрыва графика функции.
28. Производная функции, ее физический смысл.
29. Производная суммы, произведения, частного.
30. Производные показательной, степенной, логарифмической, тригонометрической функции.
31. Теорема Лагранжа и ее геометрический смысл.
32. Экстремум Функции. Правило исследования функции на экстремум.
33. Неопределенный интеграл и его свойства.
34. Определенный интеграл и его свойства. Формула Ньютона-Лейбница.
35. Основные понятия и определения комбинаторики.
36. Случайный опыт и случайное событие. Вероятность события. Теоремы сложения событий.
37. Основные понятия и определения математической статистики.

Литература:

_Основные источники:

1. Башмаков М.И. Математика 10 кл (базовый уровень) – М.: Издательский центр «Академия», 2013.
2. Башмаков М.И. Математика 11 кл (базовый уровень) – М.: Издательский центр «Академия», 2012.
Дополнительные источники:
3. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. – М.: Высшая школа, 2008.
4. Атанасян Л.С. Геометрия 10-11 кл. – М.: Просвещение, 2007.
5. Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа : Учебник под ред. Г. Н. Яковлева. – М.: Наука, 1987.
6. Математика для техникумов. Геометрия :Учебник под ред. Г. Н. Яковлева. – М.: Наука, 1989.
7. Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов – М.: «Наука», 1989.