**Математика**

Уважаемые студенты, выполненные задания отправляйте на проверку на [yulshvecov@ya.ru](mailto:yulshvecov@ya.ru). Необходимо отправлять в формате **pdf** одним файлом.

Здесь находится журнал вашей успеваемости:

[**https://docs.google.com/spreadsheets/d/1FX0QBKR0ZNB2Xrh2DFoK0IRr4zPHn9e6wWJxXhlH27U/edit?usp=sharing**](https://docs.google.com/spreadsheets/d/1FX0QBKR0ZNB2Xrh2DFoK0IRr4zPHn9e6wWJxXhlH27U/edit?usp=sharing)

**Лекция (9.11.20)**

**Тема: Повторные независимые испытания**

**Задание:** выполнить конспект следующей лекции, отправить до 29.11.12

**§5. Формула Бернулли**

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие может появиться либо не появиться. Условимся считать, что вероятность события А в каждом испытании одна и та же, а именно равна р (0< p < 1). Следовательно, вероятность непоявления события А в каждом испытании также постоянна и равна q = 1 – p.

Часто возникает задача вычислить вероятность того, что при n испытаниях событие А наступит ровно k раз.

Искомая вероятность обозначается P(k).

Например, символ Р (3), означает вероятность того, что в пяти испытаниях событие появится ровно 3 раза и, следовательно, не наступит 2 раза.

Поставленную задачу можно решить с помощью так называемой формулы Бернулли.

P(k) =,

где .

Вероятности того, что в n испытаниях событие наступит : а)менее t раз; б) более t раз; в) не менее t раз; г) не более t раз находят соответственно по формулам :

a) P(0) + P(1)+…+ P(t–1)= P(k<t),

б) P(t+1) + P(t+2) + … + P(n) = P(k>t),

в) P(t) + P(t +1) + … + P(n) = P(k≥t),

г) P(0) + P(1) +… + P(t) = P(k≤t).

Пример. Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжение одних суток не превысит установленной нормы, равна р=0,7. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

Решение. Вероятность нормального расхода электроэнергии в продолжении каждых из 6 суток постоянна и равна р=0,7. Следовательно, вероятность перерасхода электроэнергии в каждые сутки также постоянна и равна q =1 – p = 1 – 0,7 = 0,3.

Из условия задачи следует, что n = 6; k=4.

Искомая вероятность по формуле Бернулли равна:

.

**§6. Локальная теорема Лапласа**

Формула Бернулли позволяет вычислить вероятность того, что событие появиться в n испытаниях ровно k раз: P(k) =

При применении формулы учитывается, что вероятность появления события в каждом испытании постоянна. Легко видеть, что пользоваться формулой Бернулли при больших значениях n достаточно трудно.

Естественно, возникает вопрос: нельзя ли вычислить интересующую нас вероятность, если число испытаний велико, не прибегая к формуле Бернулли? Оказывается, можно.

Локальная теорема Лапласа и дает асимптотическую формулу, которая позволяет приближенно найти вероятность появления события ровно k раз в n испытаниях, если число испытаний достаточно велико.

Локальная теорема Лапласа.

Если вероятность р появления события А в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность Р(k) того, что событие А появится в n испытаниях ровно k раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше n):

Р(k) =

где  φ(x) = ; q = 1 – p.

Имеются таблицы, в которых помещены значения функции φ(x)= ,

соответствующие положительным значениям аргумента x (см. приложение 1).

Для отрицательных значений аргумента пользуются теми же таблицами, так как φ(х) – функция четная, то есть φ(–x) = φ(x).

Пример. Найти вероятность того, что событие А наступит ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании

равна 0,2.

Решение. По условию, n=400; k=80; p=0,2; q=0,8.

Воспользуемся формулой Лапласа:

Р(80)≈.

Вычислим определяемое данными задачи значение х:

x = (k–np) / = (80 – 400 ∙ 0,2) / 8 = 0

По таблице приложения 1 находим φ(0)=0,3989.

Искомая вероятность:

Р(80)= (1/8)∙0,3989=0,04986.

Формула Бернулли приводит примерно к такому же результату (выкладки ввиду их громоздкости опущены): Р(80)=0,0498.

**§7. Интегральная теорема Лапласа**

Вновь предположим, что производится n испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А постоянна и равна р (0<p<1). Как вычислить вероятность P(k,k) того, что событие А появится в n испытаниях не менее k и не более k раз (для краткости будем говорить «от kдо kраз»)? На этот вопрос отвечает интегральная теорема Лапласа, которую мы приводим ниже.

Интегральная теорема Лапласа.

Если вероятность р наступления события А в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность P(k, k) того, что событие А появится в n испытаниях от kдо k раз, приближенно равна определенному интегралу:

 ,

где  и .

При решении задач, требующих применения интегральной теоремы Лапласа, пользуются специальными таблицами, так как неопределенный интеграл , не выражается через элементарные функции. Таблица для функции Φ(х) = приведена в приложении 2. В таблице даны значения функции Ф(х) для неотрицательных значений х; для х<0 пользуются той же таблицей, так как Ф(х) – функция нечетная: Ф(–х) = – Ф(х). В таблице приведены значения функции лишь до х = 5, так как для x>5 можно принять Ф(х) = 0,5. Функцию Ф(х) часто называют функцией Лапласа.

Пример. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100.

Решение. По условию р = 0,2; q=0,8; n= 400; k=70; k=100.

Вычислим верхний и нижний пределы интегрирования:



.

Таким образом, получаем:

P(70; 100) = Ф (2,5) – Ф(–1,25) = Ф (2,5) + Ф(1,25),

так как Ф(–1,25) = –Ф (1,25).

По таблице приложения 2 находим:

Φ(2,5) = 0,4938, Φ(1,25) = 0,3944.

Искомая вероятность: P(70; 100) = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882.

**§8. Формула Пуассона**

Пусть производится n независимых испытаний¸ в каждом из которых вероятность появления события А равна р. Для определения вероятности k появлений события в испытаниях используют формулу Бернулли. Если же n велико, то пользуются асимптотической локальной формулой Лапласа. Однако, эта формула непригодна, если вероятность события мала (р ≤ 0,1). В этих случаях (n велико, р мало) прибегают к асимптотической формуле Пуассона.

Итак, поставим перед собой задачу найти вероятность того, что при очень большом числе испытаний, в каждом из которых вероятность события очень мала, событие наступит ровно k раз. Сделаем важное дополнение: произведение n∙p сохраняет постоянное значение, а именно, n∙p=λ.

Формула Пуассона имеет вид:

,

где λ=n∙p.

Эта формула выражает закон Пуассона распределения вероятностей массовых (n велико) и редких (р мало) событий.

Пример. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредиться равно 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудут три негодных изделия.

Решение. По условию n=5000; р = 0,0002; k = 3. Найдем λ:

λ = n ∙ p= 5000 ∙ 0,0002 = 1.

Искомая вероятность по формуле Пуассона равна:

